Aplicații ale derivatelor în fizică, geometrie și economie

Realizat de eleva clasei a XI-a, profil real,

Verlan Alexandrina

Profesor: Bâzga Angela

Anul 2022

Aplicații ale derivatelor în fizică

Să se determine înălţimea la care trebuie aşezată o sursă de lumină deasupra unei platforme circulare de rază *a* pentru ca iluminarea platformei să fie maximă, ştiind că intensitatea luminoasă *I* pe direcţia verticală este constantă, iar iluminarea *E* este dată de formula de mai jos, unde *α* este unghiul de incidenţă a razelor pe această suprafaţă.

$$E = \frac{I \cdot cos\alpha}{r^2}$$

R/e: Notăm cu *x* distanța de la sursa de lumină până la platformă. Avem ΔSNB- dreptunghic. Conform T. Pitagora: $r^2 = a^2 + x^2$

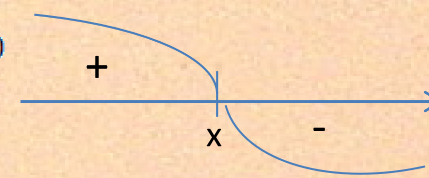
$$cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$E = E(x) = \frac{I \cdot x}{(a^2 + x^2)(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{I \cdot x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, E: (0, +\infty) \to R$$

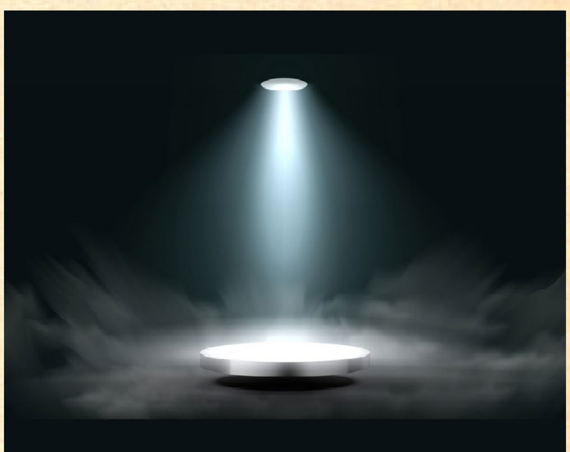
$$E'(x) = \left(\frac{I \cdot x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)' = I\frac{x' \cdot (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - x\left[(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}\right]'}{(a^2 + x^2)^{\frac{3 \cdot 2}{2}}} =$$

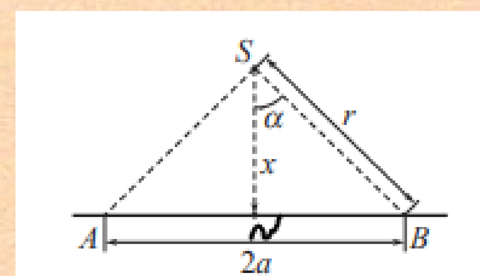
$$= I\frac{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - x \cdot \frac{3}{2}(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(a^2 + x^2)^3} = I\frac{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 + x^2)^3}$$

$$I\frac{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 + x^2)^3} = 0$$



$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} - p.de\ maxim$$

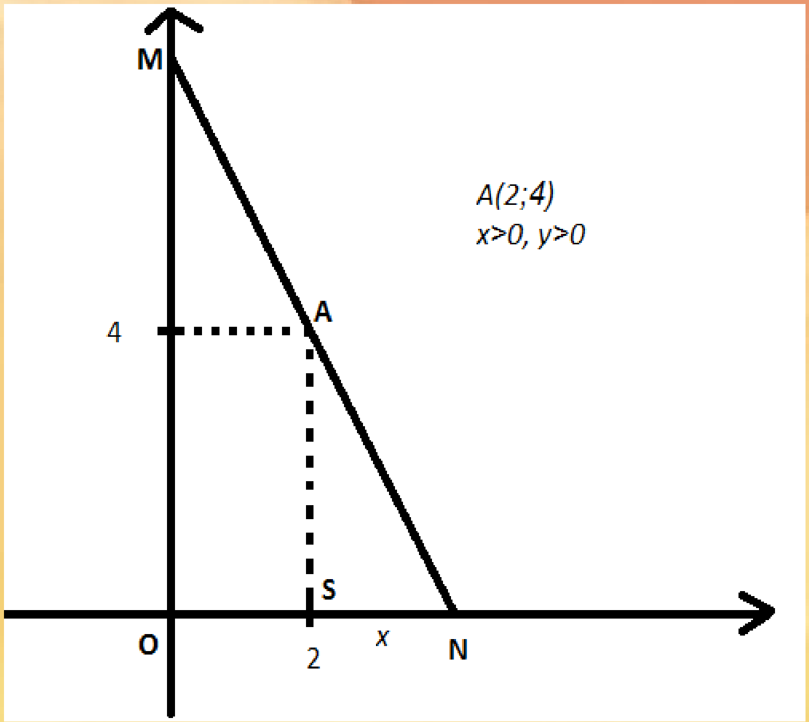




$$Răspuns: \hat{I}nălțimea\ trebuie\ să\ fie\ de \frac{a}{\sqrt{2}}\ unități.$$

Aplicații ale derivatelor în geometrie

Prin punctul A(2;4) este dusă o dreaptă. Punctele de intersecție a dreptei cu axele de coordonate (x>0, y>0), împreună cu originea sistemului de coordonate, sunt vârfurile unui triunghi dreptunghic. Care este lungimea celei mai mari catete ale acestui triunghi, astfel încât aria acestui triunghi să fie minimă?



R/e: ΔMON~ΔASN

$$\frac{MO}{AS}=\frac{ON}{SN}=\frac{MN}{AN}$$

$$\frac{MO}{4}=\frac{OS+SN}{SN}\Leftrightarrow\frac{MO}{4}=\frac{2+SN}{SN}$$

Fie SN=x

$$\frac{MO}{4}=\frac{2+x}{x}\Rightarrow MO=\frac{4(2+x)}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow MO=\frac{8+4x}{x}$$

$$\mathcal{A}_{\Delta MON}=\frac{MO\cdot ON}{2}=\frac{MO\cdot(2+x)}{2}=$$

$$=\frac{8+4x}{x}(2+x)\cdot\frac{1}{2}$$

Fie $\mathcal{A}_{\Delta MON}=\mathcal{A}$

$$A(x)=\frac{8+4x}{x}(2+x)\cdot\frac{1}{2}=\frac{16+8x+8x+4x^2}{2x}=$$

$$=\frac{2x^2+8x+8}{x}$$

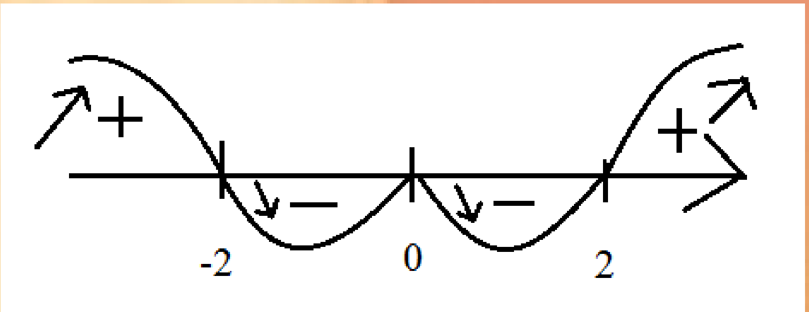
$$A(x)'=\left(\frac{2x^2+8x+8}{x}\right)'=\frac{4x^2+\cancel{8x}-2x^2-\cancel{8x}-8}{x^2}=$$

Aplicații ale derivatelor în geometrie

$$= \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$

$$\frac{2x^2 - 8}{x^2} = 0, x \neq 0$$

$$2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 - p.min \\ x = -2 < 0 \end{array}\right.$$



$$OM > ON$$

$$x = SN = 2$$

$$ON = 2 + x = 2 + 2 = 4$$

$$OM = \frac{8 + 4x}{x} = \frac{8 + 4 \cdot 2}{2} = 8$$

$Răspuns: OM = 8\ unități.$

Aplicații ale derivatelor în economie

Un camion trebuie să parcurgă 100 km cu o viteză medie de v km/h (cu condiția că $40 \le v \le 70$), consumând

$$\left(8+\frac{v^2}{300}\right)$$

litri/h de benzină. Să se afle viteza optimă (pentru care cheltuielile sunt minime), știind că șoferul este retribuit cu 30 lei/h, iar benzina costă 15 lei litrul.

R/e:

$$t=\frac{s}{v} \Leftrightarrow t=\frac{100}{v}$$

$$\text{În } t=\frac{100}{v} \text{ ore au fost consumați}$$

$$\left(8+\frac{v^2}{300}\right)\cdot\frac{100}{v}=\frac{v^2+2400}{3v} \text{ litri.}$$

c(v)-cheltuielile totale

$$c(v)=30\cdot\frac{100}{v}+15\cdot\frac{v^2+2400}{3v}=$$

$$=\frac{5v^2+15000}{v}\ (lei)$$

Aplicații ale derivatelor în economie

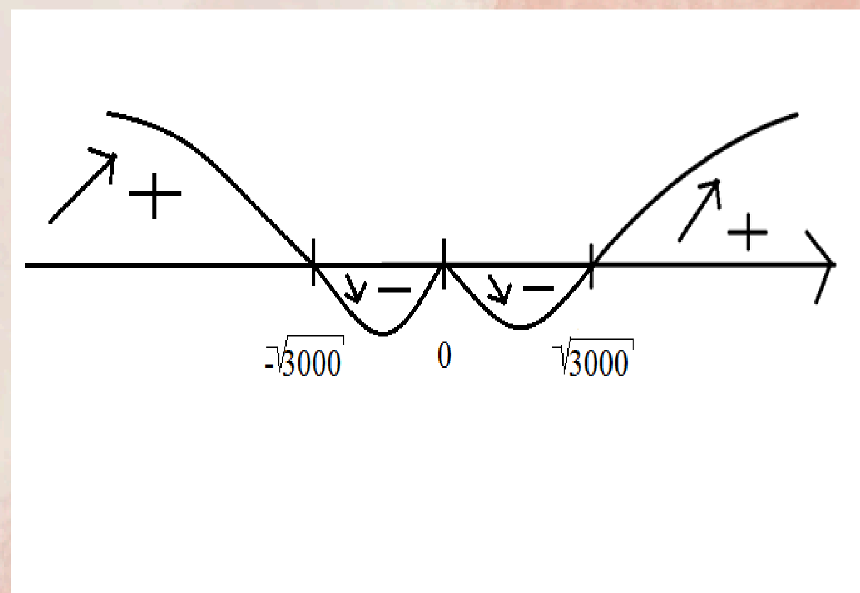
$$c'(v) = \left(\frac{5v^2 + 15000}{v}\right)' = \frac{5v^2 - 15000}{v^2}$$

$$\frac{5v^2 - 15000}{v^2} = 0, v \neq 0$$

$$5v^2 - 15000 = 0 \Leftrightarrow 5v^2 = 15000 \Leftrightarrow v^2 = 3000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = \sqrt{3000} > 0 \\ v = -\sqrt{3000} < 0 \end{array}\right.$$

$$v_{optimă} = \sqrt{3000} \approx 54{,}77 \text{(km/h)}$$



Răspuns: *Viteza optimă este de* 54,77 *km/h*.

Mulțumesc pentru atenție!