



**APLICATIILE**  
**PROGRESIILOR**  
ARITMETICE SI GEOMETRICE



RUSTAMOVA DANIELA, CLASA 11 'C'

# Ce este o progresie aritmetică?

O **progresie aritmetică** este un șir de numere astfel încât diferența dintre termenii consecutivi este constantă.

De exemplu șirul 5, 7, 9, 11, 13, 15, ... este o progresie aritmetică cu o diferență comună de 2.

**Proprietăți:** Orice termen al unei progresii aritmetice (cu excepția capetelor) este media aritmetică a predecesorului și succesorei sale:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},$$

proprietate de la care îi vine și denumirea.

# Ce este o progresie geometrică?

O **progresie geometrică** este o serie în care (începând de la al doilea membru) raportul dintre orice membru și membrului precedent este constant. Acest raport se mai numește coeficient. Semnul ei uzual este  $q$ . Denumirea acestei progresii provine de la proprietatea oricărui număr din șir (cu excepția capetelor) de a fi egal cu media geometrică a celor doi vecini ai săi (cu condiția ca termenii șirului să fie numere pozitive).

**Proprietăți:** Orice termen al unei progresii geometrice este media geometrică între predecesorul și succesorul său:

$$b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}$$



---

# ***APLICATIILE PROGRESIILOR***

ÎN MATEMATICĂ, ISTORIE, NATURĂ:



# ÎN NATURĂ

**Condiție:** Fiecare animal unicelular simplu se reproduce prin împărțirea în 2 părți. Câte celule au fost inițial, dacă după o diviziune de șase ori a devenit 640?

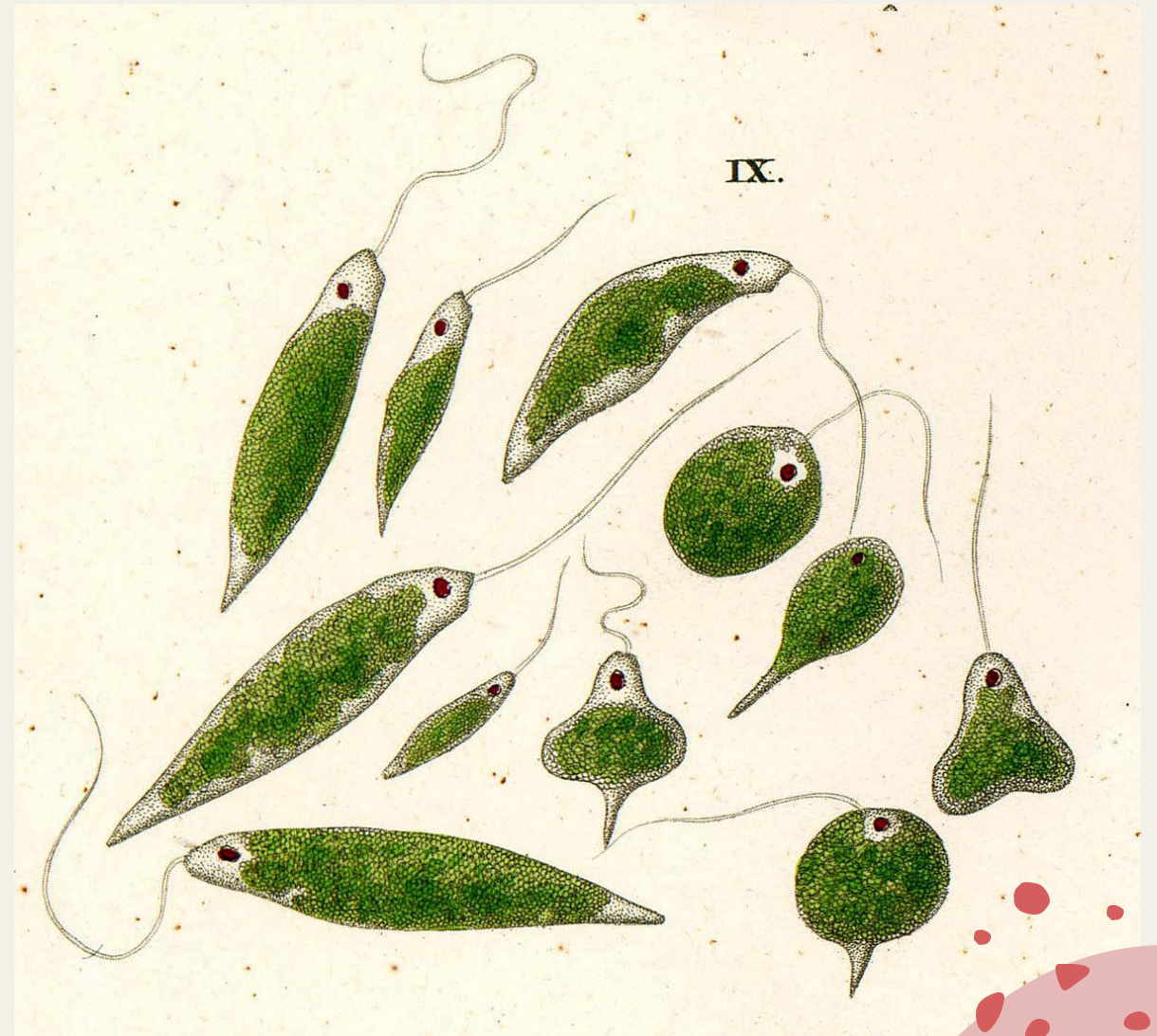
**Rezolvare:**  $b_7=640$

Fie că inițial au fost  $b_1$  celule. Numărul de celule crește exponențial. Apoi, după divizia a șasea au devenit:  $640=b_1 \cdot 2^6$

$$640=b_1 \cdot 64$$

$$b_1=640/64=10 \text{ celule.}$$

**Răspuns:** Inițial au fost 10 celule.



# ÎN CONSTRUCȚII SI INGINERIE

**Condiție:** Când se depozitează buștenii de lemn, aceștia sunt așezați într-un anumit fel. Câți bușteni sunt într-o frontieră dacă sunt așezați 12 bușteni la baza acesteia?

**Rezolvare:**  $a_1 = 12$ ,  $a_n = 1$ ,  $d = -1$

$S_n = ?$

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$$

$$1 = 12 + (n - 1) \cdot (-1)$$

$$1 = 12 - n + 1$$

$$n = 12 + 1 - 1$$

$$n = 12$$

**Răspuns:** 78 de bușteni.



# ÎN CONTURILE BANCARE

**Condiție:** La 1 ianuarie 2017, deponentul a contribuit cu 40.000 de lei la banca de economii. Care a fost valoarea contribuției sale de la 1 ianuarie 2019, dacă MAIB a acumulat anual 6% din suma depozitului?

**Rezolvare:**  $b_1=40000$

$b_2=40000+40000*0,06=42400$

$q=42400/40000=1,06$

$b_3=b_1*q^2=40000*1,06^2=44944$

**Răspuns:** 44944 de lei a devenit suma depozitului.



# ÎN MEDICINĂ

**Condiție:** Cursul băilor lecuitoare începe de la 15 minute. În prima zi și măriți timpul acestei proceduri în fiecare zi următoare cu 10 minute. Câte zile trebuie făcute băi în regimul indicat pentru a ajunge la durata maximă a acestora de 1 oră și 45 de minute?

**Rezolvare:**  $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$

$$105 = 15 + (n - 1) \cdot 10$$

$$105 = 15 + 10n - 10$$

$$-10n = 15 - 10 - 105$$

$$-10n = -100$$

$$n = 10$$

**Răspuns:** 10 zile.





# ÎN MATEMATICĂ:

**Condiția:** Un pătrat nou este înscris într-un pătrat cu latura  $a$  prin unirea punctelor mijlocii ale laturilor sale. Un pătrat nou este înscris în acest pătrat în același mod și așa mai departe la infinit. Care este suma perimetrelor tuturor acestor pătrate?

**Rezolvare:** Latura unui pătrat înscris în primul pătrat cu latura  $a$  este  $a_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Latura pătratului înscris în pătratul următor  $a_2 = \frac{a}{2}$ ,  $a_3 = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ . Obținem o progresie geometrică infinit descrescătoare:  $P_1 = 4a$ ,  $P_2 = \frac{4a}{\sqrt{2}}$ ,  $P_3 = 2a$ ,  $P_4 = \frac{4a}{2\sqrt{2}}$  cu numitorul  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Haideți să îi calculăm suma:

$$S = \frac{P_1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4a\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 4a\sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 4a(2+\sqrt{2})$$

**Răspuns:**  $4a(2+\sqrt{2})$

# ÎN ISTORIE:

**Condiția:** Cel mai mare matematician, astronom și fizician german Karl Gauss s-a născut la Braunschweig (Germania). Tatăl său, grădinar și maestru al fântânilor, era renumit pentru arta de a număra rapid și ușor. Această abilitate a trecut fiului, care mai târziu a spus că „ar putea să numere înainte de a putea vorbi”. Primul succes a venit lui Gauss la vârsta de 9 ani. Profesorul le-a spus elevilor să găsească suma numerelor întregi de la 1 la 40. Se aștepta să țină elevii ocupați cu această sarcină pentru o perioadă lungă de timp. Dar Gauss și-a dat seama imediat cum să grupeze termenii și a dat răspunsul:  $(1 + 40) + (2 + 39) + (3 + 38) + \dots = 40 \cdot 21 = 820$ . Găsiți o formulă cu care puteți calcula rapid suma numerelor întregi de la 1 la  $n$ .

**Rezolvare:** Din formula  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$  deodată aflăm suma căutată.

**Răspuns:** 
$$\frac{n(n+1)}{2}$$

# ÎN ZVONURI

**Condiția:** Un vizitator la ora 8.00 spune vestea la trei vecini; fiecare dintre ei spune vestea la trei dintre vecinii săi etc. La ce oră va fi cunoscută această veste jumătate din sat?

**Rezolvare:** Așadar, dimineața vestea a fost cunoscută doar de patru: un vizitator și trei localnici. Aflând această veste, fiecare dintre cei trei cetățeni s-a grăbit să o spună celorlalți trei. A durat și un sfert de oră. Așa că, la jumătate de oră de la sosirea veștilor în oraș, știau deja despre asta  $4+3*3=13$  oameni. Fiecare dintre cele nouă persoane noi s-a împărtășit în următorul sfert de oră cu alți trei cetățeni, astfel încât până la ora 8.45 dimineața vestea a devenit cunoscută de  $13+3*9=40$  de persoane. Dacă zvonul se răspândește în tot satul și mai departe în acest fel, adică toți cei care află această veste reușesc să o transmită la trei consăteni în următorul sfert de oră, atunci sesizarea satului va avea loc conform următoarelor programe:

9:00 –  $40+3*27=121$  de persoane; 9:15 –  $121+3*81=364$  de persoane; 9:30 –  $364+3*243=1093$  de persoane.

Această problemă poate fi rezolvată în alt mod, folosind formula sumă a primilor  $n$  termeni ai unei progresii geometrice. În acest caz,  $q = 3$ ,  $b_1 = 1$ ,  $S_n = 8000$ ,  $n$  este necunoscut.

$8000 = \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1}$      $3^n = 16001$     Pentru a găsi  $n$ , rețineți că  $3^6 = 729$ ,  $3^7 = 2187$ ,  $3^8 = 6561$ ,  $3^9 = 19683$ . Prin urmare,  $n$  trebuie să fie cel puțin 9. Pentru  $n = 9$  avem:  $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (3^9 - 1)}{3 - 1} = \frac{19683 - 1}{2} = 9841 > 8000$

**Răspuns:** Asta înseamnă că la pasul 9, mai mult de jumătate dintre locuitorii orașului vor afla vestea. Este ușor de calculat că acest lucru se va întâmpla la ora 10:00 dimineața.

***VĂ SUNT PROFUND  
RECUNOSCĂTOARE  
PENTRU ATENȚIE!***

---

AȘTEPT MULTE NOTE DE 10  
PENTRU ACEST PROIECT  
EXTRAORDINAR

